千變萬化 -
Gabriel's Problem

一、研究動機

興趣：數學。

尋找過程：課外讀物閱讀、數學遊戲。

困難：問題太深奥，看不懂無法解題。

最後：加布里埃爾問題(Gabriel's Problem)

原因：難易適中，適合我們的程度。

二、研究問題

1. 探究2*2的四宮格加布里埃爾問題
2. 探究2*3的六宮格加布里埃爾問題
3. 探究3*3的九宮格加布里埃爾問題
4. 探究3*4十二宮格加布里埃爾問題

三、Gabriel’s Problem

(一)加布里埃爾問題(Gabriel’s Problem)
題目說明:在 3x3 的宮格中寫下數字 1-9，然後，將每一行中的所有數字相乘，並將結果寫在該行下方；還將每一列中的數字相乘，並將乘積寫在該列右方，最後出題者拿掉了數字 1-9。

變化一：使用數字1、2、3、4、5、6、9、10和 12，完成下列九宮格。

			12
			60
20	135		

變化二：使用數字 1、2、3、4、6、8、9、12和 16 來完成下列九宮格。

			36
			384
			144
96	384	54	

四、資料分析

(一)探究2*2的加布里埃爾問題

1. 將4個數字放在2*2的四宮格有幾種變化？

1	2	2
3	4	12
3	8	

4!=4*3*2*1=24

因為
第一格有4個選擇，
第二格有3個選擇，
第三格有2個選擇，
最後一格只剩1個選擇，
所以共有24種變化。

2. 猜測：透過觀察、尋找，我們猜測「當任意四數a, b, c, d的最大公因數(gcd)是1時，則其中任意二數相乘的最大公因數必≤2。」

舉例	特性	gcd	任意二數相乘(ab,cd)的最大公因數(gcd)必≤2
1,2,3,4	連續四數	1	✓
5,6,7,8	較大連續四數	1	✓
1,3,5,7	連續奇數	1	✓
10,20,30,40	連續倍數	10	✕
10,11,12,13	連續二位數	1	✓
11,23,36,47	無規律四數	1	✓
2,4,6,8	連續偶數	2	✕
3,33,333,3333	相同數字但不同位數	3	✕

四、資料分析

3、證明：

有四個正整數a, b, c, d，

其gcd(a, b, c, d)=1

，則gcd(ab, cd)≤2。

利用**反證法**，嘗試證明。

證明：

如果 gcd(ab, cd) > 2，

那麼 ab 和 cd

一定有一個大於 2 的公因數 p，

也就是 ab = p * x，

cd = p * y，

其中 x 和 y 是正整數。

但是這樣就與 ab 和 cd 互質的假設矛盾了，

因為 gcd(ab, cd) = p >2。

所以我們可以推論出

gcd(ab, cd) ≤ 2。

同理，**我們可以證明任意四數相乘的結果的最大公因數必定都小於或等於 2。**

四、資料分析

(二)、探究2*3加布里埃爾問題

1. 將6個數字放在2*3的六宮格有幾種變化？

1	2	3	6
4	5	6	120
4	10	18	

6!=6*5*4*3*2*1=720

2. 數字1~6，其中任意取兩數(三數)相乘，能多有少種變化？

發現：

(1)任意取兩數相乘
會有15種算式變化，
但其實只有13個乘積倍數,
因為6和12會重複出現。

(2)任意取三數相乘
會有20種算式變化，
但其實只有16個乘積倍數,
因為12、24、30、60會重複出現。

3. 猜測：「當任意六數a, b, c, d, e, f的最大公因數(gcd)是1時，則其中任意二數相乘或任意三數相乘的最大公因數必≤3，」。

舉例	特性	gcd	任意二數相乘或任意三數相乘的最大公因數必≤3
1~6	連續六個個位數	1	✓
2,4,6,8,10,12	連續六個偶數	2	✓
1,3,5,7,9,11	連續六個奇數	1	✓
10,20, 30,40, 50,60	連續倍數	10	✕
4,11,19,23,77, 95	無規律	1	✓

四、資料分析

4. 證明：

有六個正整數

a, b, c, d, e, f，

其gcd(a, b, c, d, e, f)=1，

則gcd(ab, cd, ef)≤3。

以反證法思考：
第一種狀況(兩數相乘)
如果 gcd(ab, cd, ef) > 3，
那麼 ab 和 cd和ef 一定有一個大於3 的公因數 p，
也就是 ab = p * x，
cd = p * y，
ef = p * z，
其中 x 、y和z 是正整數。
但是這樣就與 ab, cd 和 ef互質的假設矛盾了，
所以gcd(ab, cd, ef) = p >3不成立，
因此，
我們可以證明互質的六數a, b, c, d, e, f，任意兩數相乘的結果的最大公因數必定都小於或等於 3。

四、資料分析

4. 證明：

有六個正整數

a, b, c, d, e, f，其

gcd(a, b, c, d, e, f)=1，

則gcd(ab, cd, ef)≤3。

以反證法思考

第二種狀況(三數相乘)：

有六個正整數a, b, c, d, e, f，

其gcd(a, b, c, d, e, f)=1，

則gcd(ace, bdf)≤3。

如果 gcd(ace , bdf) > 3，

那麼 ace和bdf 一定有一個大於 3

的公因數 p，

也就是 ace= p * x，

bdf = p * y，

其中 x 和y 是正整數。

但是這樣就與 ace 和 bdf互質的假設矛盾了，

所以gcd(ace, bdf) = p >3不成立。

同理，**我們可以證明互質的六數 a, b, c, d, e, f，任意三數相乘的結果的最大公因數必定都小於或等於 3。**

四、資料分析

（三）、探究3*3加布里埃爾問題

1.將9個數字放在3*3的九宮格有幾種變化？

9!=1*2*3*4*5*6*7*8*9

=362880

九宮格

2.數字1~9任意取三數相乘，能得到多少種變化？

任意三數相乘會有84種算式變化，但其實只有62個乘積倍數,因為有21個數字會重複出現，尤其24共出現3次，所以21+1+62=84。

3.解題技巧

(一)5：因為5的倍數的個位數只有5和0， 是最容易判斷尋找的數字。

(二)7：因為在1~9當中只有7的倍數有獨特性。

(三)9：因為9是所有可用數字裡的最大數 ，有較少的可能，找完之後再找 3、6的倍數。

(四)2、4、8：這三個數字的倍數，它們的特性一定是偶數，必須考量其他條件一併判斷。

(五)1：因為所有的數字都有這一個因數。

(六)小技巧：如果三數相乘的其中兩數出來後，就可以填入第三個數字。

四、資料分析

（四）、探究3*4的加布里埃問題

1. 將12個數字放在3*4的十二宮格有幾種變化？

12!

十二宮格

2.數字1~12任意取三數相乘，能得到多少種變化?

任意取三數相乘會有220種算式變化，但其實只有164個乘積倍數,因為有41個數字會重複出現。

3.數字1~12任意取四數相乘，能得到多少種變化？

任意取四數相乘會有495種算式變化，但其實只有277個乘積倍數，因為有96個倍數乘積會重複出現。

4.解題技巧

(一)10：因為10的倍數的個位數一定是0，只要兩個交錯數字的倍數個位數都是0，就可以完全確定那兩數的交會點是10。

(二)5：因為5的倍數的個位數只有5和0，是第二容易判斷尋找的數字。

(三)11、7：這兩個數字是很獨特的數字，可以最先檢驗確認。

(四)9：，因為9有快速判斷倍數的方法，找完之後再找3、6的倍數。

(五)2、4、8、12：這四個數字的倍數一定是偶數。

(六)1：所有的數字都有1這個因數。

六、評鑑與檢討

(一)尋找主題

一件困難且耗費時間的任務，解決：以自身能力和經驗判斷。

(二)蒐集資料

缺乏中文資料，我們從**影片**知道是用類似相乘的方式來解出最後的答案，**與我們所學的因數、倍數相關**，我們由此開始研究。

(三)擬定研究問題

簡化法思考，先使用最簡單、最容易思考的四宮格，開始認識題型，接下來慢慢變化，提升難度，討論出四宮格、六宮格、九宮格、十二宮格的變化。

(四)資料分析

運用**excel**的公式列表，才可以迅速**整理出這些龐大的數字**，這個研究似乎很困難，有複雜性，充滿各種可能變化，必須多加思考。

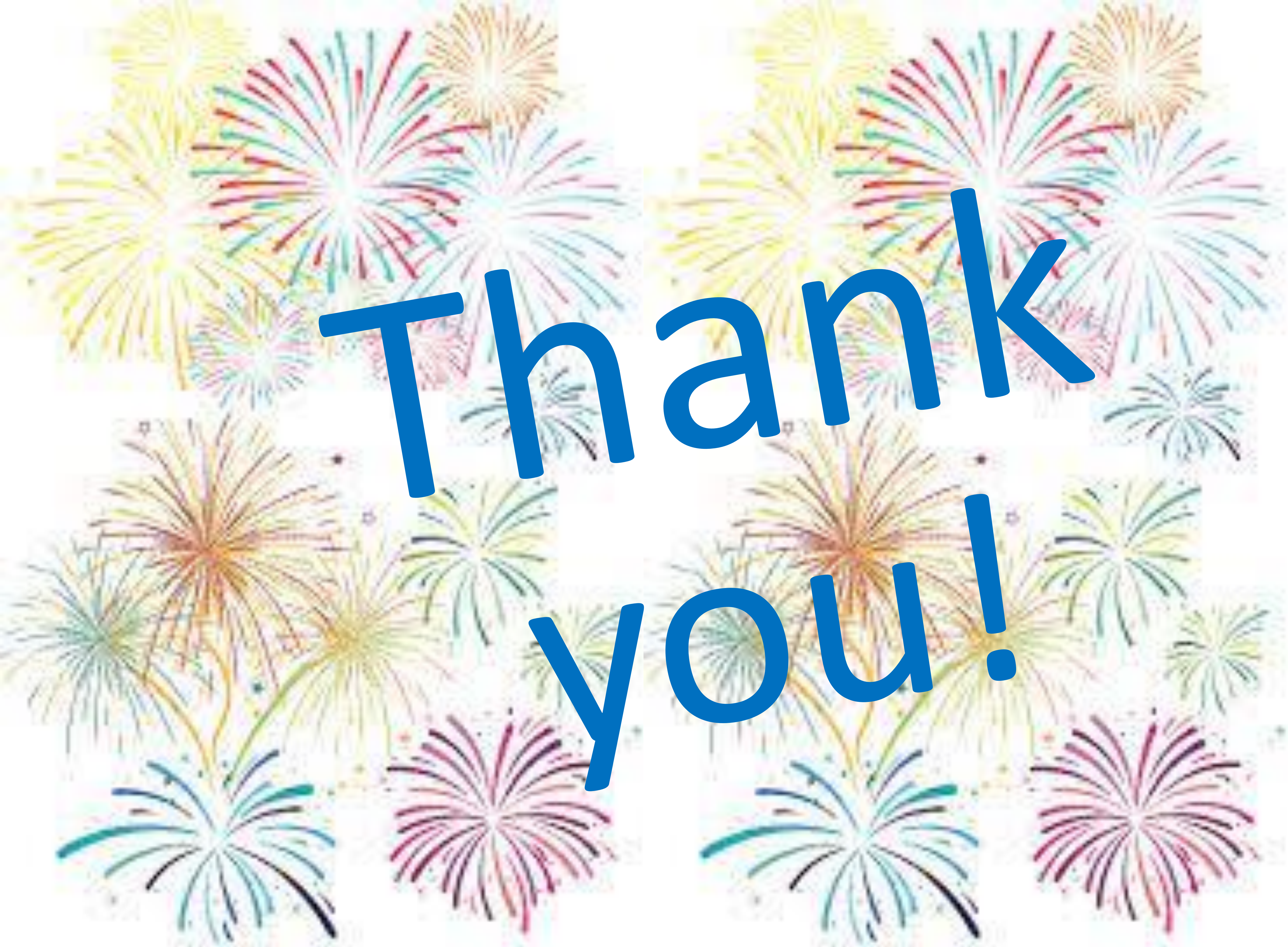
(五)研究結果與討論

1.一連串的數字，還要去觀察找出脈絡，已經很頭昏腦脹。

2.解題過程中，原本的方法：有一些數字剛好幸運挑選正確，但是要有邏輯有條理的排除，所以很辛苦的思考。

(六)撰寫報告

我們花了非常久的時間，最後甚至連假日也都在趕工，完成報告後，我們也能好好休息了，是一件有**成就感**的事情。


Thank you!