

彰化縣 108 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書（封面）

作品編號：

組別：

<input type="checkbox"/> 國小組	<input checked="" type="checkbox"/> 數學類
<input checked="" type="checkbox"/> 國中組	<input type="checkbox"/> 自然與生活科技類
	<input type="checkbox"/> 人文社會類

作品名稱：標好標滿

◎封面切勿出現校名、作者、校長及指導者姓名，違者不予收件。

彰化縣 108 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選 作品說明書(內文)

第一階段 研究訓練階段(由教師撰寫)

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

課程名稱	獨立研究	年級	七、八	總節數	資優班 (一週 1 節)
課程 內涵	個別或小組探討實際問題 經由各領域課程的探究，七年級時讓資優生找出小組或個人感興趣的主題，進行研究。八年級時將更加強調研究之完整性，檢視報告進行充實與修改，增進研究報告撰寫與發表之能力。		授課 教師	資優班教師	
主題課程目標 (次目標)			教學調整		
1.個人或小組研究，增進問題解決能力。 2.擬定研究計畫及選擇適合的研究方法。 3.學習撰寫一份完整的研究報告。 4.培養主動積極、自我負責的學習態度。			1.除課內時間和學校資源外，視實際狀況和學生需求引入社區資源，以增加研究成果的豐富性及完整度。 2.舉辦獨立研究發表會，教師評、自評及同儕互評並行。		
課程設計(上學期)					
主題	教學重點	評量方式	節數	備註	
選定 主題	1.學生尋找欲研究的主題，並確定研究主題與範圍。 2.撰寫研究動機與目的。	1.口頭發表 7.觀察評量 9.檔案評量	3 節		
擬定 計畫	1.與學生討論此研究主題的資料蒐集來源，確認學生對此主題的掌握度。 2.擬定研究計畫，具體說明內容	1.口頭發表 7.觀察評量 9.檔案評量	4 節		

	及預定時間，經指導教師和家長確認後執行。			
蒐集資料	1.依主題蒐集各式資料，並進行資料的摘要整理。 2.針對資料蒐集的狀況，檢視研究計畫的可行性，必要時須做修改。	1.口頭發表 7.觀察評量 9.檔案評量	4 節	
執行研究	1.選擇合適的研究方法，依個人研究計畫進行研究。 2.以撰寫研究日誌和影像紀錄的方式，主動紀錄研究歷程並定時檢視進度。 3.教師留意學生研究情況，依實際問題進行修改和調整。	1.口頭發表 7.觀察評量 9.檔案評量	10 節	視學生研究主題結合器材操作及成品製作等評量方式
課程設計(下)				
主題	教學重點	評量方式	節數	備註
報告定稿	1.檢視寒假研究進度。 2.整理並完成個人獨立研究成果書面報告。 3.檢查參考資料。	1.口頭發表 2.書面報告 7.觀察評量 9.檔案評量	7 節	視研究性質和成果完整度參加研究類競賽活動
成果彙整	學習 PDF 電子書製作基本技巧。	1 口頭發表 2 書面報告 7 觀察評量 9 檔案評量	7 節	
研究發表	1.製作獨立研究簡報檔或其他發表所需物品。 2.獨立研究發表排練，進行同儕互評與自評。 3.辦理獨立研究成果發表會。	1 口頭發表 6 活動設計 7 觀察評量 9 檔案評量 10 簡報檔案	7 節	

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

(一)資優資源班的學生:

藉由獨立研究課程來訓練學生的研究能力，及情意課程來培養學生的表達與溝通能力。

(二)非資優資源班的學生:

將有興趣的學生，引導適當的指導老師，指導老師利用課餘時間，團體討論尋求研究的主題及分工來進行研究課程，並指導學生撰寫研究內容與格式，學校會提供場地與相關的設備。

第二階段 獨立研究階段(由學生撰寫)

一、研究動機

我們在「科學教育會刊」上看到一道數學問題，內容是：

【標好標滿】

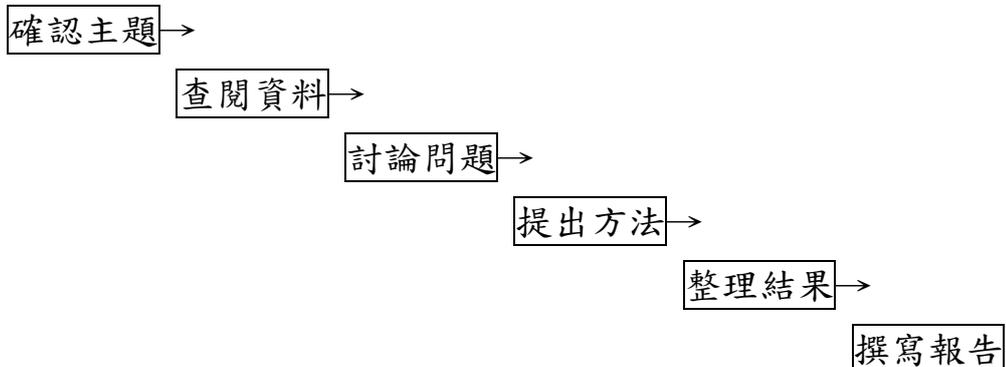
四條直線、兩兩相交，在每個交點上標上一個數字，在任何一條直線上有三個交點，若我們想在三個交點填上數字 1、2、3 且各出現一次，應該怎麼做？如果直線有更多條，結果又是如何呢？

直覺上這題可以慢慢一個一個填入然後去測試結果，但隨著直線數量的增加，我們發現一個一個填入的方法，它的工作量大得驚人！於是我們想透過把圖形轉成表格來討論，恰好也獲得一個簡單的結果。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

(一)擬定正式計畫:

我們以下方流程執行研究計畫：



(二)研究問題:

1.有 n 條線兩兩相交，則在每一條線上交點處填入正整數

$$1、2、3、\dots、(n-1)$$

且每個正整數剛好各出現一次，則 n 有何限制?

2.有 n 個圓彼此相交，則在每一個圓上交點處填入正整數

$$1、2、3、\dots、n$$

且每個正整數剛好只出現一次，則 n 有何限制?

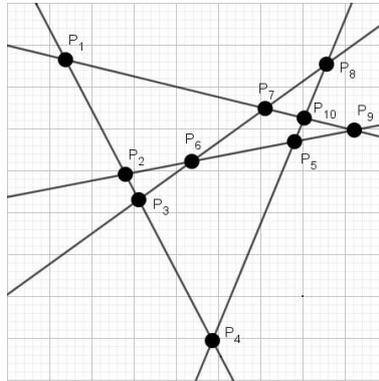
(三)工作進度表:

預定進度	9/4	9/11	9/18	9/25	10/2	10/9	10/16	10/23	10/30	11/6	11/13	11/20
擬定問題	■	■										
尋找資料	■	■	■	■	■	■						
文獻整理				■	■	■	■	■				
討論發現			■	■	■	■	■	■	■			
深入探討					■	■	■	■	■			
提出結果							■	■	■	■		
彙整結果								■	■	■	■	■

三、彙整相關文獻

已知知識：平面上相異 n 條直線，之間交點最多 $\frac{n \times (n-1)}{2}$ 個。

舉例來說， $n=5$ ，交點最多 $\frac{5 \times (5-1)}{2} = 10$ 個點，如圖



四、資料分析

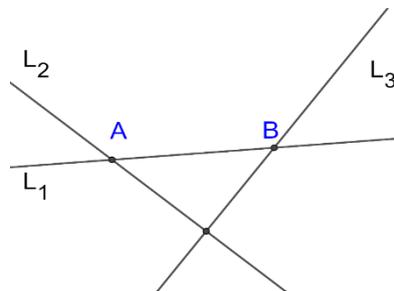
n 條相異直線相交，最多每條線上會出現 $(n-1)$ 個點，所以我們最多能填入數字 $1, 2, \dots, (n-1)$ ，以下是我們透過 *Geogebra* 繪圖的分析，另外為了討論方便，我們用英文字母 $A, B, C \dots$ 替代數字 $1, 2, 3 \dots$ 。

(一) 相異 n 條直線相交情形且考慮最多交點數情形

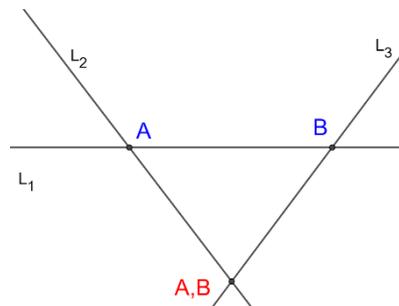
1. 三條 相異直線 L_1, L_2, L_3 相交

《步驟一》在 L_1, L_2 的交點上填入 A ，

在 L_1, L_3 的交點上填入 B ，如下圖所示。



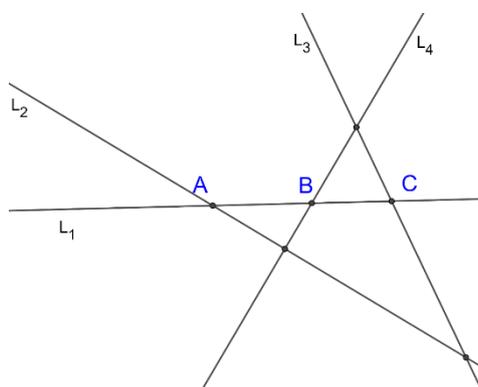
《步驟二》判斷在 L_2, L_3 的交點上是否能填入 A 或 B 。



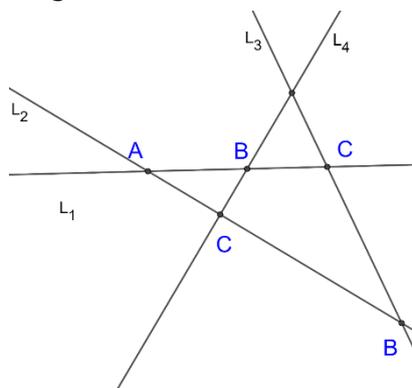
【結果】：發現 L_2 不管填入 A 還是 B ，都會和 L_1 上已有的字母重複，所以三條相異直線相交，我們無法做到在二個交點填上字母 A 、 B 且各出現一次。

2. 四條相異直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 相交

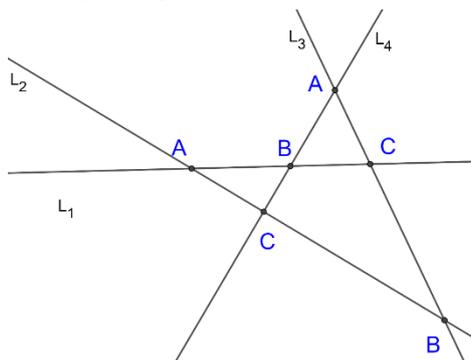
《步驟一》在 L_1 、 L_2 的交點上填入 A ，
在 L_1 、 L_4 的交點上填入 B ，
在 L_1 、 L_3 的交點上填入 C ，如下圖所示。



《步驟二》在 L_2 、 L_4 的交點上填入 C ，
在 L_2 、 L_3 的交點上填入 B ，如下圖所示。



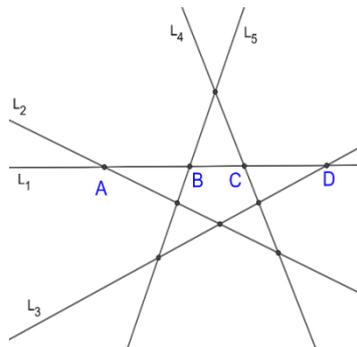
《步驟三》最後在 L_3 、 L_4 的交點上填入 A ，如下圖所示。



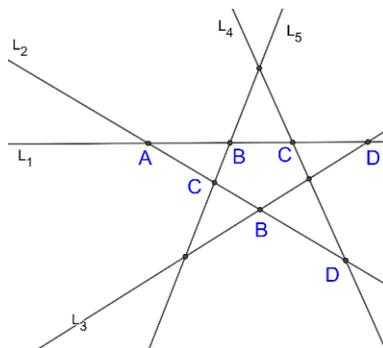
【結果】：我們在四條相異的直線上，做到在三個交點填入字母
 A 、 B 、 C 且各出現一次。

3. 五條相異直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、 L_5 相交

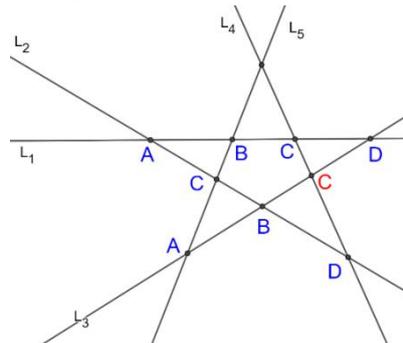
《步驟一》在 L_1 、 L_2 的交點上填入 A ，
 在 L_1 、 L_5 的交點上填入 B ，
 在 L_1 、 L_4 的交點上填入 C ，
 在 L_1 、 L_3 的交點上填入 D ，如下圖所示。



《步驟二》在 L_2 、 L_5 的交點上填入 C ，
 在 L_2 、 L_3 的交點上填入 B ，
 在 L_2 、 L_4 的交點上填入 D ，如下圖所示。



《步驟三》在 L_3 、 L_4 的交點上試著填入 C ，發現會和 L_1 、 L_4 的交點重複，如下圖所示。



【結果】：我們在五條相異的直線上，找不到能在四個交點填上字母 A 、 B 、 C 、 D 且各出現一次。

4. 六條相異直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、 L_5 、 L_6 相交

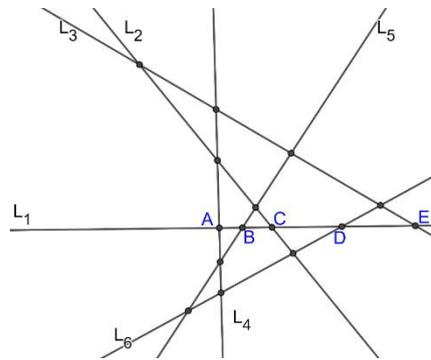
《步驟一》在 L_1 、 L_4 的交點上填入 A ，

在 L_1 、 L_5 的交點上填入 B ，

在 L_1 、 L_2 的交點上填入 C ，

在 L_1 、 L_6 的交點上填入 D ，

在 L_1 、 L_3 的交點上填入 E ，如下圖所示。

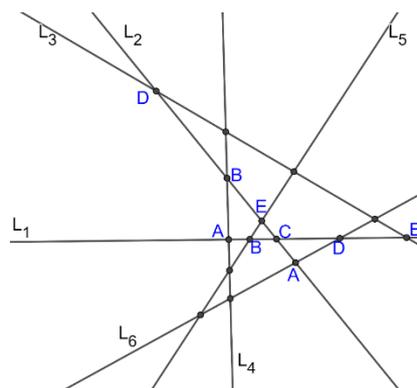


《步驟二》在 L_2 、 L_3 的交點上填入 D ，

在 L_2 、 L_4 的交點上填入 B ，

在 L_2 、 L_5 的交點上填入 E ，

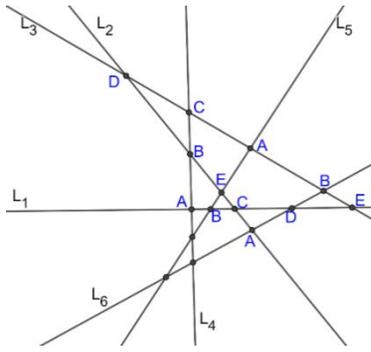
在 L_2 、 L_6 的交點上填入 A ，如下圖所示。



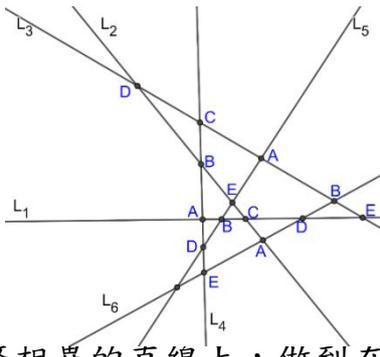
《步驟三》在 L_3 、 L_4 的交點上填入 C ，

在 L_3 、 L_5 的交點上填入 A ，

在 L_3 、 L_6 的交點上填入 B ，如下圖所示。



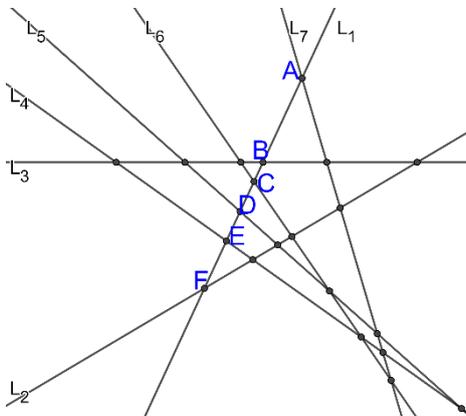
《步驟四》在 L_4 、 L_5 的交點上填入 D ，
 在 L_4 、 L_6 的交點上填入 E ，如下圖所示。



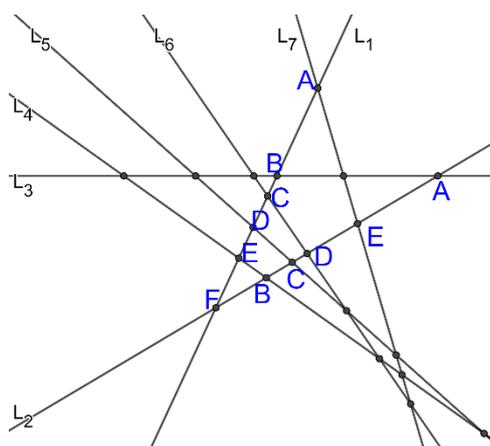
【結果】：我們在六條相異的直線上，做到在五個交點填上字母
 A 、 B 、 C 、 D 、 E 且各出現一次。

5. 七條相異直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、 L_5 、 L_6 、 L_7 相交

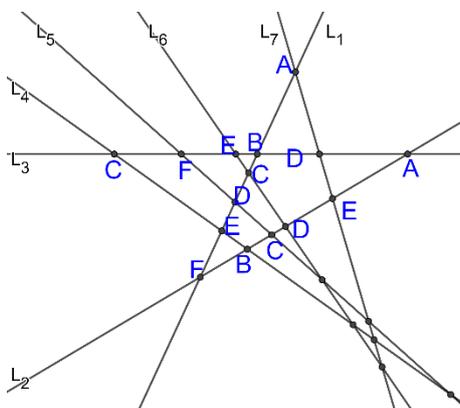
《步驟一》在 L_7 、 L_1 的交點上填入 A ，
 在 L_7 、 L_6 的交點上填入 B ，
 在 L_7 、 L_3 的交點上填入 C ，
 在 L_7 、 L_5 的交點上填入 D ，
 在 L_7 、 L_4 的交點上填入 E ，
 在 L_7 、 L_2 的交點上填入 F ，如下圖所示。



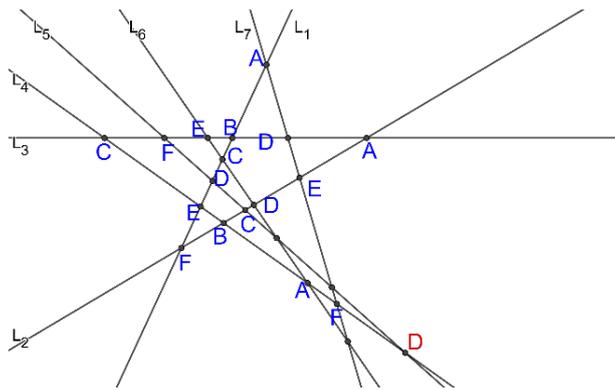
《步驟二》在 L_2 、 L_4 的交點上填入 B ，
 在 L_2 、 L_5 的交點上填入 C ，
 在 L_2 、 L_6 的交點上填入 D ，
 在 L_2 、 L_1 的交點上填入 E ，
 在 L_2 、 L_3 的交點上填入 A ，如下圖所示。



《步驟三》在 L_3 、 L_4 的交點上填入 F ，
 在 L_3 、 L_5 的交點上填入 B ，
 在 L_3 、 L_6 的交點上填入 E ，
 在 L_3 、 L_1 的交點上填入 D ，如下圖所示。



《步驟四》在 L_4 、 L_6 的交點上填入 A ，
 在 L_4 、 L_7 的交點上填入 F ，發現 L_4 上最後一點只能
 填入 D ，但會和 L_5 上的 D 重複，如下圖所示。

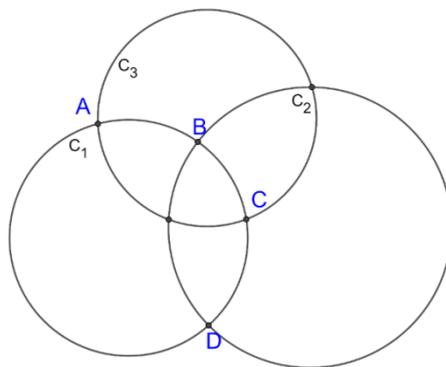


【結果】：我們在七條相異的直線上，找不到能在六個交點填上字母 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 且各出現一次。

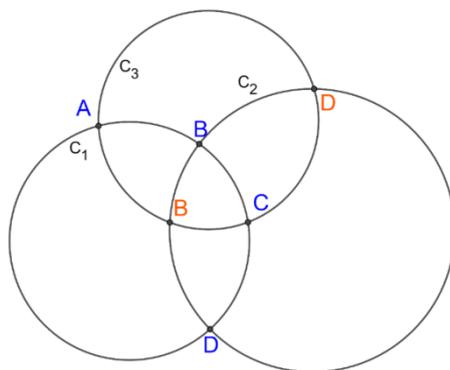
(二)相異 n 個圓相交情形且考慮最多交點數情形

1. 三相異圓 C_1 、 C_2 、 C_3 彼此相交

《步驟一》在 C_1 、 C_3 的交點上分別填入 A 、 C ，
在 C_1 、 C_2 的交點上分別填入 B 、 D 。



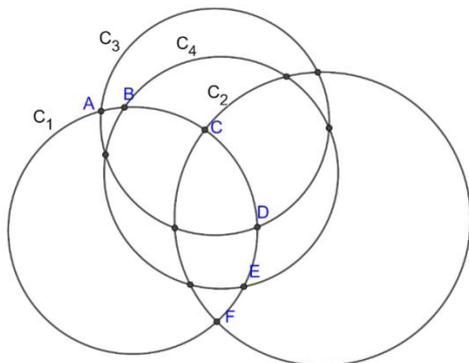
《步驟二》發現 C_2 、 C_3 的交點不管填入什麼都會重複。



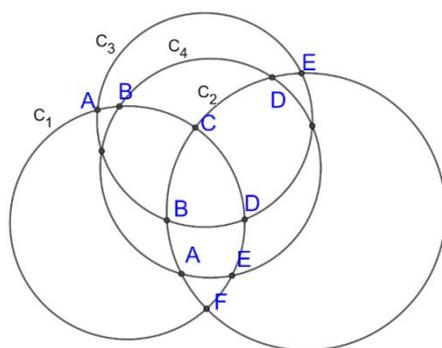
【結果】：我們在三相異的圓上，做不到能在四個交點填上字母 A 、 B 、 C 、 D 且各出現一次。

2. 四相異圓 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 彼此相交

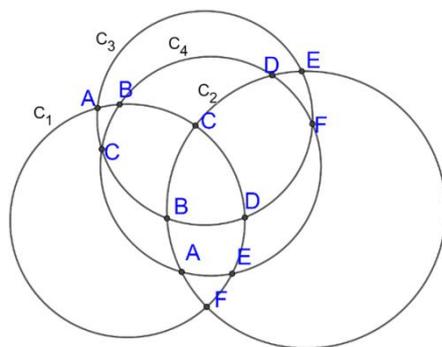
《步驟一》在 C_1 、 C_3 的交點分別填入 A 、 D ，
 在 C_1 、 C_4 的交點分別填入 B 、 E ，
 在 C_1 、 C_2 的交點分別填入 C 、 F ，如下圖所示。



《步驟二》在 C_2 、 C_4 的交點分別填入 A 、 D ，
 在 C_2 、 C_3 的交點分別填入 B 、 E ，如下圖所示。



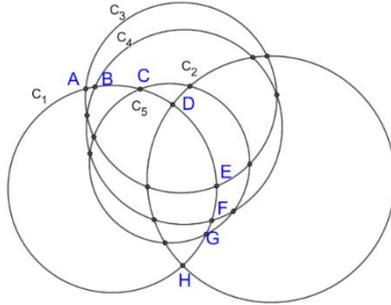
《步驟四》在 C_3 、 C_1 的交點分別填入 A 、 D ，
 在 C_3 、 C_2 的交點分別填入 B 、 E ，
 在 C_3 、 C_4 的交點分別填入 C 、 F ，如下圖所示。



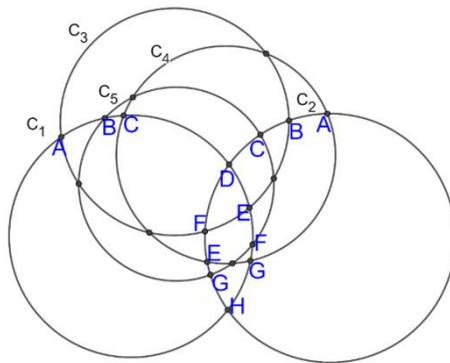
【結果】：我們在四相異的圓上，找到能在六個交點填上字母 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 且各出現一次。

3. **五相異圓** C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 彼此相交

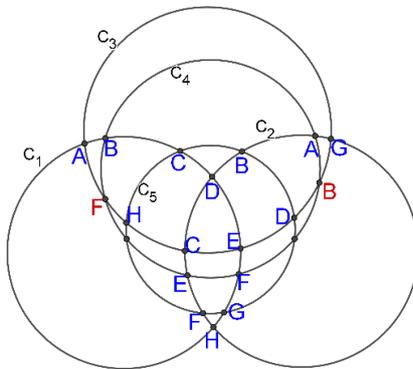
《步驟一》在 C_1, C_3 的交點分別填入 A, E ，
 在 C_1, C_4 的交點分別填入 B, F ，
 在 C_1, C_5 的交點分別填入 C, G ，
 在 C_1, C_2 的交點分別填入 D, H ，如下圖所示。



《步驟二》在 C_2, C_4 的交點分別填入 A, E ，
 在 C_2, C_3 的交點分別填入 B, F ，
 在 C_2, C_5 的交點分別填入 C, G ，
 在 C_2, C_1 的交點分別填入 D, H ，如下圖所示。



《步驟三》發現 C_3 剩餘的點不管填入甚麼都會重複，如下圖所示。

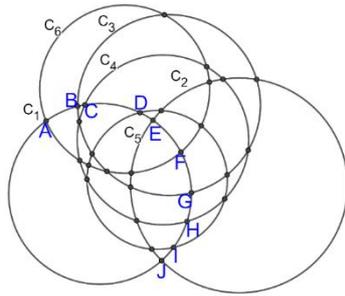


【結果】：我們在五相異的圓上，做不到能在八個交點填上字母

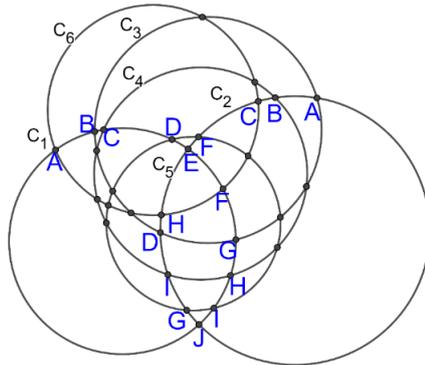
$A、B、C、D、E、F、G、H$ 且各出現一次。

4. **六相異圓** $C_1、C_2、C_3、C_4、C_5、C_6$ 彼此相交

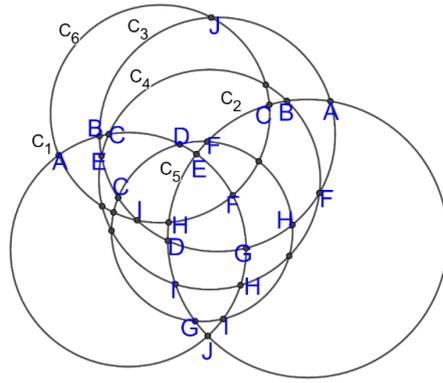
《步驟一》在 $C_1、C_6$ 的交點分別填入 $A、F$ ，
 在 $C_1、C_3$ 的交點分別填入 $B、G$ ，
 在 $C_1、C_4$ 的交點分別填入 $C、H$ ，
 在 $C_1、C_5$ 的交點分別填入 $D、I$ ，
 在 $C_1、C_2$ 的交點分別填入 $E、J$ ，如下圖所示。



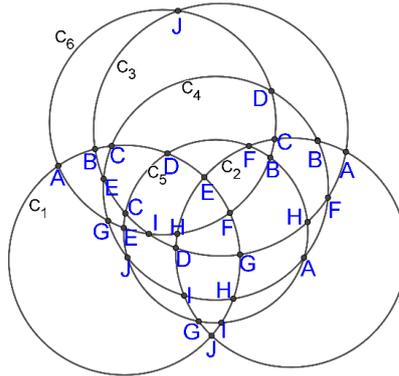
《步驟二》在 $C_2、C_3$ 的交點分別填入 $A、D$ ，
 在 $C_2、C_4$ 的交點分別填入 $B、I$ ，
 在 $C_2、C_6$ 的交點分別填入 $C、H$ ，
 在 $C_2、C_1$ 的交點分別填入 $E、J$ ，
 在 $C_2、C_5$ 的交點分別填入 $G、F$ ，如下圖所示。



《步驟三》在 $C_3、C_2$ 的交點分別填入 $A、D$ ，
 在 $C_3、C_5$ 的交點分別填入 $C、H$ ，
 在 $C_3、C_4$ 的交點分別填入 $E、F$ ，
 在 $C_3、C_1$ 的交點分別填入 $B、G$ ，
 在 $C_3、C_6$ 的交點分別填入 $I、J$ ，如下圖所示。



《步驟四》在 C_4 、 C_5 的交點分別填入 AJ ，
 在 C_4 、 C_2 的交點分別填入 BI ，
 在 C_4 、 C_1 的交點分別填入 CH ，
 在 C_4 、 C_6 的交點分別填入 DG ，
 在 C_4 、 C_3 的交點分別填入 EF ，如下圖所示。



【結果】：我們在六相異的圓上，找到能在十個交點填上字母 A 、
 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 I 、 J 且各出現一次。

五、研究結果與討論

因為一個一個試太浪費時間，所以我們突然想到能不能把線跟線的交點用表格來呈現，於是有了以下的結果：

(一) n 條線兩兩相交結果表示成 $n \times n$ 表格

1. 把 3 條線兩兩相交結果表示成 3×3 表格

L_1 和 L_2 兩相異直線交點為 A ， L_1 和 L_3 兩相異直線交點為 B

在相對應位置以藍色表示，如下表所示：

	L_1	L_2	L_3
L_1		A	B
L_2	A		
L_3	B	★	

看的出來 L_2 和 L_3 兩相異直線交點★填 A 或 B 都不行

2.把4條線兩兩相交結果表示成4x4表格

L_1 和 L_2 兩相異直線交點為 A ， L_1 和 L_3 兩相異直線交點為 B

L_1 和 L_3 兩相異直線交點為 C ，如下表所示：

	L_1	L_2	L_3	L_4
L_1		A	B	C
L_2	A			
L_3	B			
L_4	C			

緊接著， L_2 和 L_3 兩相異直線交點只能填 C ，

同樣的， L_2 和 L_4 兩相異直線交點只能填 B ，如下表所示：

	L_1	L_2	L_3	L_4
L_1		A	B	C
L_2	A		C	B
L_3	B	C		
L_4	C	B		

最後發現 L_3 和 L_4 兩相異直線交點只能填 A ，如下表所示：

	L_1	L_2	L_3	L_4
L_1		A	B	C
L_2	A		C	B
L_3	B	C		A
L_4	C	B	A	

∴ 不管是每一行或者每一列 A、B、C 都只會出現一次。

3. 把 5 條線兩兩相交結果表示成 5x5 表格

L_1 和 L_2 兩相異直線交點為 A ， L_1 和 L_3 兩相異直線交點為 B

L_1 和 L_4 兩相異直線交點為 C ， L_1 和 L_5 兩相異直線交點為 D

如下表所

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
L_1		A	B	C	D
L_2	A				
L_3	B				
L_4	C				
L_5	D				

示：

緊接著， L_2 和 L_3 兩相異直線交點如果我們填 C ，

同樣的， L_2 和 L_4 兩相異直線交點如果我們填 B ，

則 L_2 和 L_5 兩相異直線交點就只能夠填 A ，如下表所示：

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
L_1		A	B	C	D
L_2	A		C	B	A
L_3	B	C			
L_4	C	B			
L_5	D	A	★		

看的出來 L_3 和 L_5 兩相異直線交點★處 A 、 B 、 C 、 D 都不行

4.把 6 條線兩兩相交結果表示成 6x6 表格

L_1 和 L_2 兩相異直線交點為 A ， L_1 和 L_3 兩相異直線交點為 B

L_1 和 L_4 兩相異直線交點為 C ， L_1 和 L_5 兩相異直線交點為 D

L_1 和 L_6 兩相異直線交點為 E ，如下表所示：

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
L_1		A	B	C	D	E
L_2	A					
L_3	B					
L_4	C					
L_5	D					
L_6	E					

L_2 和 L_3 兩相異直線交點如果我們填 C ，

L_2 和 L_4 兩相異直線交點如果我們填 D ，

L_2 和 L_5 兩相異直線交點就只能夠填 E ，

L_2 和 L_6 兩相異直線交點就只能夠填 B ，如下表所示：

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
L_1		A	B	C	D	E
L_2	A		C	D	E	B
L_3	B	C				
L_4	C	D				
L_5	D	E				
L_6	E	B				

L_3 和 L_4 兩相異直線交點如果我們填 E ，

L_3 和 L_5 兩相異直線交點如果我們填 A ，

L_3 和 L_6 兩相異直線交點就只能夠填 D ，如下表所示：

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
L_1		A	B	C	D	E
L_2	A		C	D	E	B
L_3	B	C		E	A	D
L_4	C	D	E			
L_5	D	E	A			
L_6	E	B	D			

L_4 和 L_5 兩相異直線交點如果我們填 B ，

L_4 和 L_6 兩相異直線交點如果我們填 A ，

L_5 和 L_6 兩相異直線交點如果我們填 C ，如下表所示：

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
L_1		A	B	C	D	E
L_2	A		C	D	E	B
L_3	B	C		E	A	D
L_4	C	D	E		B	A
L_5	D	E	A	B		C
L_6	E	B	D	A	C	

∴.不管是每一行或者每一列 A 、 B 、 C 、 D 、 E 都只會出現一次。

(二) n 個圓兩兩相交結果

關於圓，我們仿造直線轉成表格的方式， C_1 與 C_2 的交點就在表格上填入 (A, B) ，所以它對稱的格子也要填入 (A, B) 。

1. 把 3 個彼此相交圓填入字母的結果表示成表格

	C_1	C_2	C_3
C_1		(A, B)	(C, D)
C_2	(A, B)		
C_3	(C, D)	★	

★處已無點可填

2. 把 4 個彼此相交圓填入字母的結果表示成表格

	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1		(A, B)	(C, D)	(E, F)
C_2	(A, B)		(E, F)	(B, D)
C_3	(C, D)	(E, F)		(C, F)
C_4	(E, F)	(B, D)	(C, F)	

3. 把 5 個彼此相交圓填入字母的結果表示成表格

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1		(A, B)	(C, D)	(E, F)	(G, H)
C_2	(A, B)		(B, F)	(A, E)	(C, G)
C_3	(C, D)	(B, F)			
C_4	(E, F)	(A, E)	★		
C_5	(G, H)	(C, G)			

★處已無點可填

4.把 6 個彼此相交圓填入字母的結果表示成表格

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
C_1		(E , J)	(B , G)	(C , H)	(D , I)	(A , J)
C_2	(E , J)		(A , D)	(B , I)	(F , G)	(C , H)
C_3	(B , G)	(A , D)		(E , F)	(C , H)	(I , J)
C_4	(C , H)	(B , I)	(E , F)		(A , J)	(D , G)
C_5	(D , I)	(F , G)	(C , H)	(A , J)		(B , E)
C_6	(A , J)	(C , H)	(I , J)	(D , G)	(B , E)	

(三)結論並回答問題

- 1.當 n 是【偶數】時，能在每一條線上交點處填入正整數 $1, 2, 3, \dots, (n-1)$ 且每個正整數剛好各出現一次。
- 2.當 n 是【偶數】時，能在每一個圓上交點處填入正整數 $1, 2, 3, \dots, (n-1)$ 且每個正整數剛好各出現一次。

六、評鑑與檢討：上述每一階段的省思與收穫

(一) 研究動機：

我們在數學遊戲裡找到的這個題目，讓我們找出圖形裡的規律，也讓我們想到了一些有關生活中會遇到的這些問題。

(二) 擬定正式計畫、研究問題及工作進度表：

一開始我們只有想到直線交點的問題，經過老師的指點，我們想要看圓是否和直線有相同的規律，整理出了屬於圓的表格，我們一開始在工作分配上有些問題，不過經過一番的討論我們也完成了工作分配。

(三) 彙整相關文獻：

一開始我們雖然找文獻時遇到了一些問題，問題是我們並不知道該打甚麼關鍵字，也不知道哪個網站的資料是正確的，於是老師就指導我們如何收關鍵字和如何判斷網站資料的正確性，但後來我們經過

努力的畫圖以及思考，想到了解決這個問題的方法，也找到更多正確的文獻。

(四) 資料分析：

我們一開始找規律時是用畫圖的方式，然後逐一把字母填入交點，後來我們也想到了由左至右的方法填字母會不會比較容易填字母，我們也試著改變填入方向，但還是沒辦法成功了，之後我們又嘗試用表格以及數線的方法，讓我們可以比較快速的把字母填入適當的交點中。

(五) 研究結果與討論：

一開始我們想用由左至右的方法來表現我們填字母的方法，也想過更改其他方向，但後來還是行不通，經過指導老師的指點讓我們，進而想出用繪製表格的方法來表現出題目的規律。

七、參考資料(未附者不予審查)

(一)國民中學數學課本(康軒版)

(二)國民中學數學課本(南一版)

(三)國民中學數學課本(翰林版)