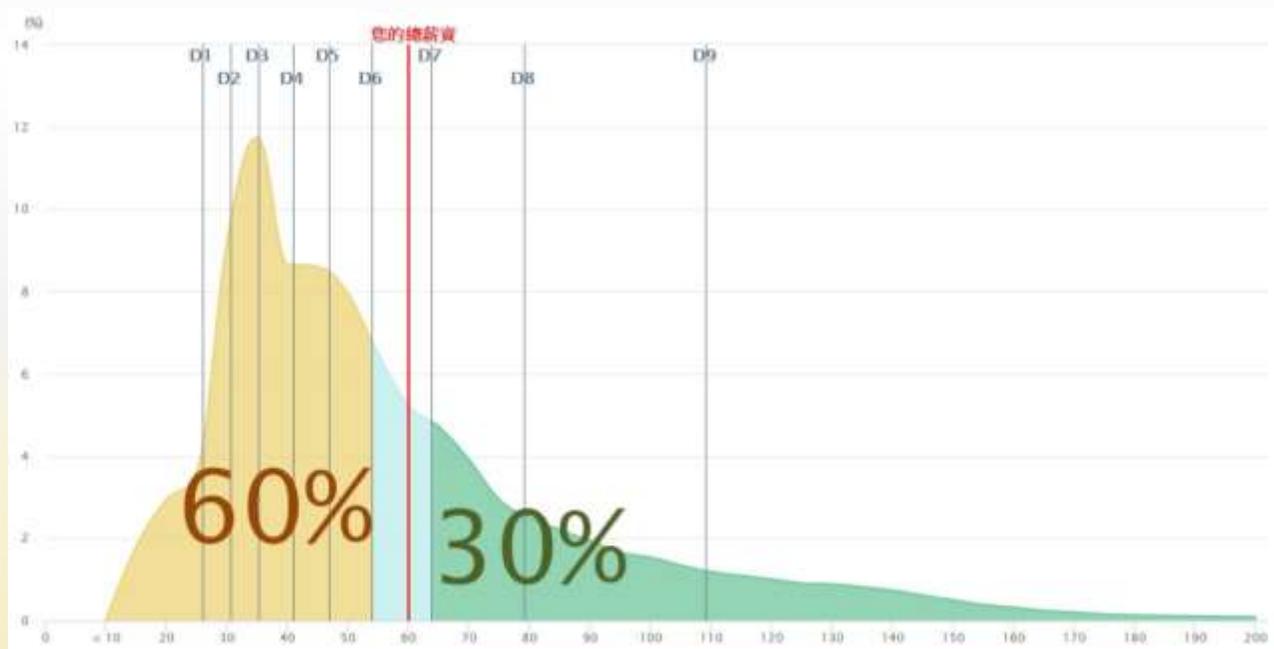
The background is a dark grey-green color with faint, light-colored sketches of various scientific and mathematical symbols. These include a globe, a microscope, a test tube, a bar chart, a percentage sign, and a book. The sketches are rendered in a simple, hand-drawn style.

探討奇偶數個數字的中位數與 平均數之穩定狀態

研究動機

- 機率與統計課程中的三個集中量數:平均數、中位數與眾數
- 新聞報導全國勞動人口平均月薪6萬元的失真性



研究動機

- 動手玩數學專欄中的一道中位數與平均數的遊戲：

$$a_1 = 53, a_2 = 13, a_3 = 41$$

$$\Rightarrow \frac{53 + 13 + 41 + a_4}{4} = 41 \Rightarrow a_4 = 57$$

$$\Rightarrow \frac{53 + 13 + 41 + 57 + a_5}{5} = 47 \Rightarrow a_5 = 71$$

依此類推我們可以得到一個數列 $\langle a_n \rangle$ 。求

(1) a_6 , a_7 與 a_8 的值。

(2) a_{12} , a_{13} 與 a_{14} 的值。

(3) 當 $n \geq 15$ 時，對 a_n 的值有何發現？

研究動機

給定三個已知數 a_1 、 a_2 、 a_3 ，爾後加一數讓前 k 項數列的中位數與前 $k+1$ 項的平均數相等，則數列存在何種規則？

文獻蒐集

- 《均中求穩》一文中利用excel統計函數求得數列的各項數值發現：

發現1

1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7
10	19	28	37	46	55
-5	-11	-17	-23	-29	-35
-0.5	-2	-3.5	-5	-6.5	-8
-1.5	-4	-6.5	-9	-11.5	-14
-4.25	-9.5	-14.75	-20	-25.25	-30.5
-5.75	-12.5	-19.25	-26	-32.75	-39.5
-5	-11	-17	-23	-29	-35
-6	-13	-20	-27	-34	-41
-16.63	-34.25	-51.88	-69.5	-87.13	-104.8
-19.38	-39.75	-60.13	-80.5	-100.9	-121.3
-9.125	-19.25	-29.38	-39.5	-49.63	-59.75
-9.875	-20.75	-31.63	-42.5	-53.38	-64.25
-5	-11	-17	-23	-29	-35
-5	-11	-17	-23	-29	-35
-5	-11	-17	-23	-29	-35

發現2

1	1	1	1	1	1
6	6	6	6	6	6
6	7	8	9	10	11
11	10	9	8	7	6
6	8.5	11	11	8.5	6
6	9.5	13	13	9.5	6
6	12.25	11.5	11.5	12.25	6
6	13.75	12.5	12.5	13.75	6
6	13	18	18	13	6
6	14	20	20	14	6
6	12.25	13.75	13.75	12.25	6
6	12.75	14.25	14.25	12.75	6
6	24.63	18	18	24.63	6
6	26.88	19	19	26.88	6
6	12.25	16.25	16.25	12.25	6

左右對稱

從文獻中產生的靈感

一、數字間比例差異影響數列的穩定情形

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11
5	2	2	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
6	2	2	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5
7	2	2	1	-2.5	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25
15	2	2	1	-4.125	-6.5	-4.25	-9.875	-9.875	-5	-10.63	-10.63	-10.63	-10.63	-10.63	-10.63
19	2	2	1	-9.875	-8.5	-4.25	-8.125	-6.813	-5	-6	-15.5	-23.81	-23.81	-23.81	-23.81
20	2	2	1	-10.63	-9	-4.25	-8.375	-6.938	-5	-6	-16.5	-25.69	-25.69	-25.69	-25.69
21	2	2	1	-10.06	-4.25	-4.25	-28.31	-7.063	-5	-6	-16.19	-9.188	-10.5	-10.5	-10.5
35	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-13.31	-9.5	-5	-6	-17.56	-15.03	-11.72	-21.69	-17.56
36	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-13.44	-9.625	-5	-6	-17.94	-15.34	-11.78	-22.31	-17.94
37	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-27.09	-5	-6	-33.34	-11.61	-11.84	-14.84	-28.72
47	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-11.94	-5	-6	-15.13	-12.59	-13.06	-15.63	-17.69
48	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-12.06	-5	-6	-15.13	-12.66	-13.13	-15.75	-17.81
49	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-12.19	-5	-6	-15.13	-12.72	-13.19	-41.91	-14.88
50	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-12.31	-5	-6	-15.13	-12.78	-13.25	-43.09	-14.88
51	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-12.44	-5	-6	-15.13	-11.25	-13.31	-17.19	-14.88
65	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-10.94	-5	-6	-15.13	-11.25	-15.03	-19.56	-14.88
199	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-10.94	-5	-6	-15.13	-11.25	-16.45	-23.03	-14.88

不具規律

從文獻中產生的靈感

二、中位數的取值方式影響數列的穩定情形

【奇數項】

1、2、**4**、8、11

【偶數項】

1、2、**4**、**8**、11、15

6(不存在數列中的虛擬中位數)

我們所提出的方法…

1. 改變每次加入的數字個數

2. 以兩數間的差距進行分類

利用不等式探討
數列變化及規則

研究歷程

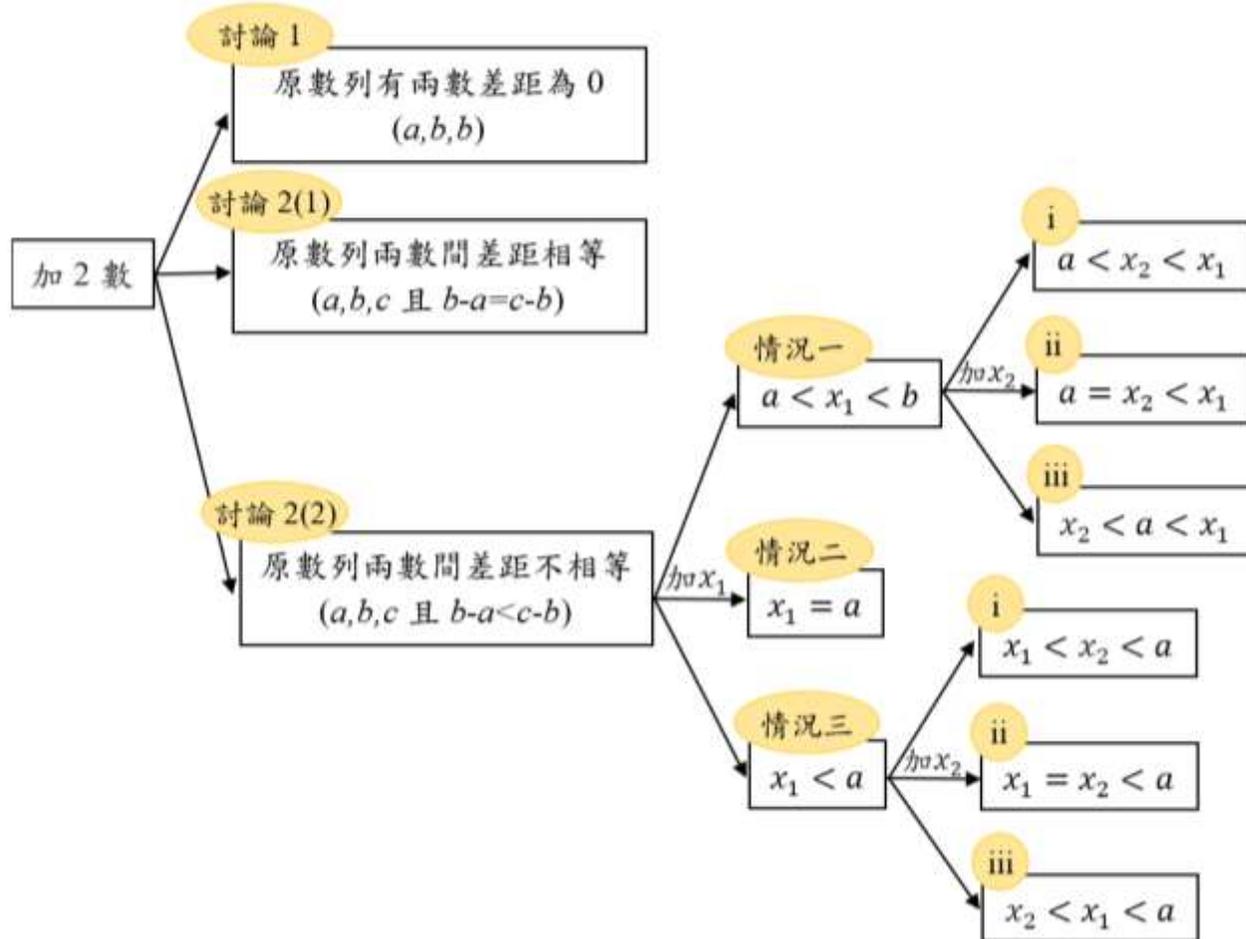
一、一次加入**2**個相同數字

數列的穩定情形大幅改善，且存在一定的變化規則。

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
4	2.5	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-2	-2.5	-3	
5	2.5	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-2	-2.5	-3	
6	2	2	0.25	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5
7	2	2	0.25	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5
8	2	2	1.5	1	-1.25	-3.5	-5.75	-8	-10.25	-10.25	-10.25	-10.25	-10.25
9	2	2	1.5	1	-1.25	-3.5	-5.75	-8	-10.25	-10.25	-10.25	-10.25	-10.25
10	2	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5
11	2	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5
12	2	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5
13	2	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5
14	2	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5
15	2	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5

研究歷程

依據兩數間的差距進行分類，將討論步驟整理如下：



研究歷程

1. 原數列 $a < b = c$

(1) 加入2個 x_1

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-a + 3b}{2} = \frac{2b + (b - a)}{2} = b + \frac{b - a}{2} > b$$

此時數列: a 、 b 、 b 、 $\frac{-a+3b}{2}$ 、 $\frac{-a+3b}{2}$

(2) 加入2個 x_2

$\Rightarrow x_2 = b = Md_1$ ，故數列為二次穩定，穩定值 $Q_2 = b$ 。

研究歷程

2. 原數列 $a < b < c$

(1) 加入2個 x_1

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2b + (b - a) - (c - b)}{2}$$

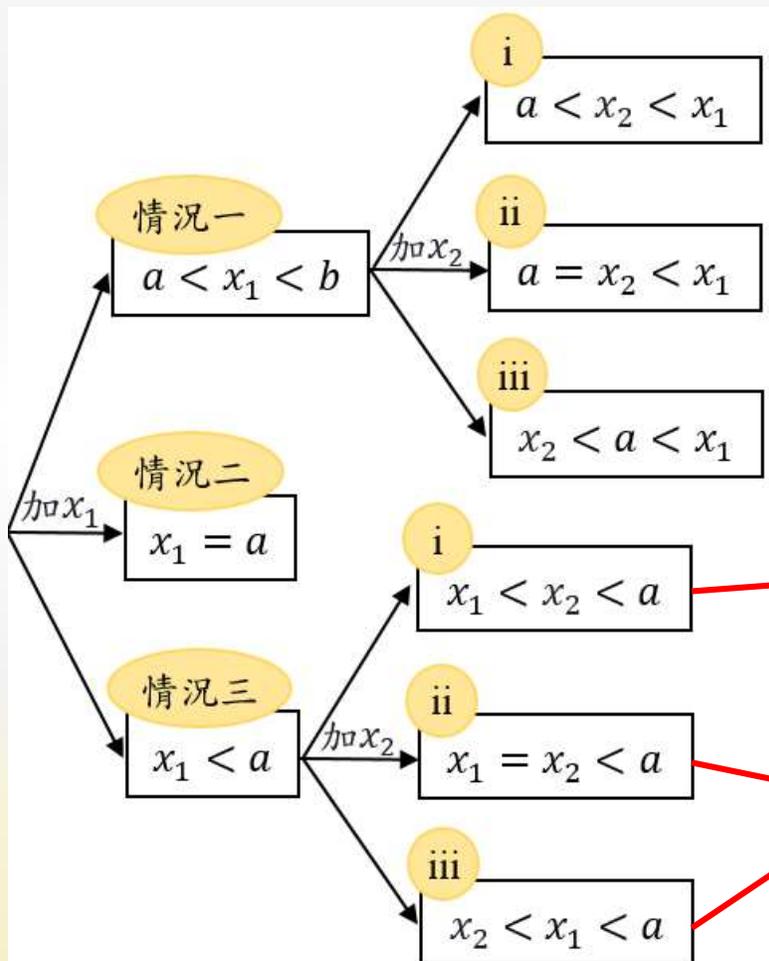
▪ 若 $b - a = c - b$ (等差數列)

$x_1 = b = Md_0$ ，故數列為一次穩定，穩定值 $Q_1 = b$ (等差中項)。

▪ 若 $b - a < c - b$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4b - a - c}{2} = b + \frac{(b - a) - (c - b)}{2} < b$$

研究歷程



【情況一】 $c - b < 3(b - a)$
 三次穩定，且穩定值為 $\frac{4b - a - c}{2}$ 。

【情況二】 $c - b = 3(b - a)$
 三次穩定，且穩定值為 a 。

【情況三】 $c - b > 3(b - a)$
 (i) $c - b > 8(b - a)$

四次穩定，且穩定值為 $\frac{7a - 5b}{2}$ 。

(ii) $c - b \leq 8(b - a)$

四次穩定，且穩定值為 $\frac{4b - a - c}{2}$ 。

研究歷程

二、一次加入4個相同數字

1. 原數列 $a < b = c$

$$(1) \text{ 加入4個 } x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{-a+5b}{4} = \frac{4b+(b-a)}{4} = b + \frac{b-a}{4} > b$$

此時數列: a 、 b 、 b 、 x_1 、 x_1 、 x_1 、 x_1

$$(2) \text{ 加入4個 } x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{-11a+27b}{16}$$

此時數列: a 、 b 、 b 、 x_1 、 x_1 、 x_1 、 x_1 、 x_2 、 x_2 、 x_2 、 x_2

$$(3) \text{ 加入4個 } x_3 \Rightarrow x_3 = \frac{-a+5b}{4} = Md_2$$

故數列為三次穩定，穩定值 $Q_3 = \frac{-a+5b}{4}$ 。

研究歷程

2. 原數列 $a < b < c$

(1) 加入4個 x_1

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4b + (b - a) - (c - b)}{4}$$

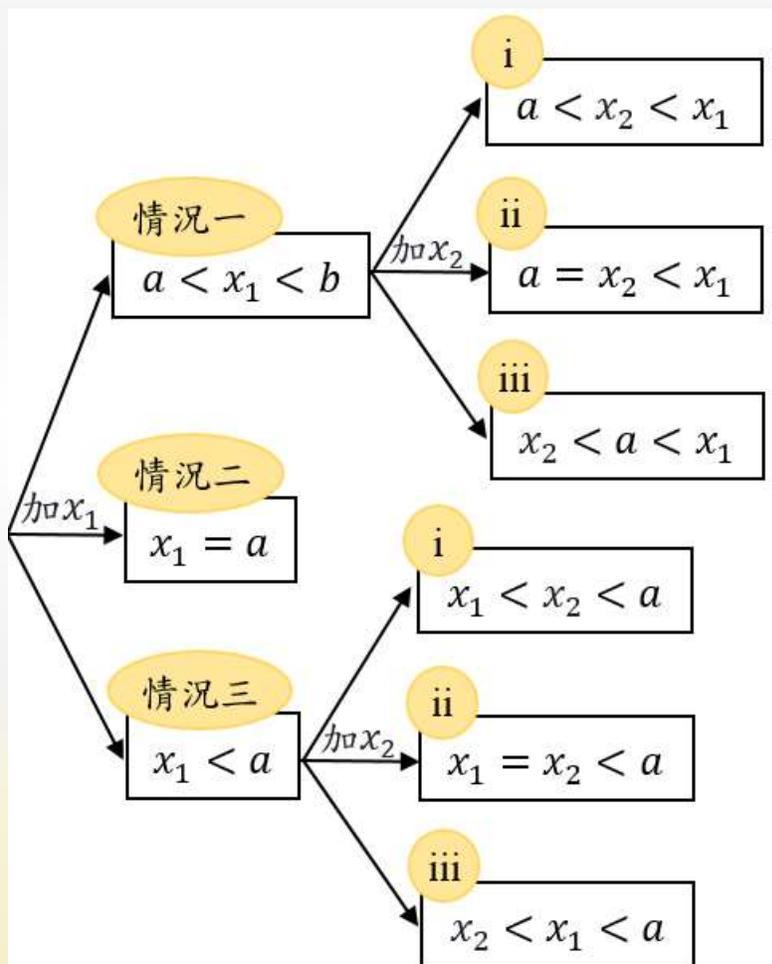
▪ 若 $b - a = c - b$ (等差數列)

$x_1 = b = Md_0$ ，故數列為一次穩定，穩定值 $Q_1 = b$ (等差中項)。

▪ 若 $b - a < c - b$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4b + (b - a) - (c - b)}{4} = b + \frac{(b - a) - (c - b)}{4} < b$$

研究歷程



【情況一】 $c - b < 5(b - a)$

三次穩定，且穩定值為 $\frac{6b-a-c}{4}$ 。

【情況二】 $c - b = 5(b - a)$

三次穩定，且穩定值為 a 。

【情況三】 $c - b > 5(b - a)$

三次穩定，且穩定值為 $\frac{6b-a-c}{4}$ 。

研究歷程

三、一次加入**6個**相同數字

由上述的討論結果，同理證得6個數的穩定狀態

原數列的三個數		穩定次數	穩定值	
1. $a < b = c$		三次	$\frac{-a + 7b}{6}$	
2. $a < b < c$	(1) $b - a = c - b$	一次	b	
	(2) $b - a < c - b$	【情況一】 $a < x_1 < b$	三次	$\frac{8b - a - c}{6}$
		【情況二】 $x_1 = a$		a
		【情況三】 $x_1 < a$		$\frac{8b - a - c}{6}$

研究歷程

四、一次加入3個相同數字 → 穩定狀態未具規律

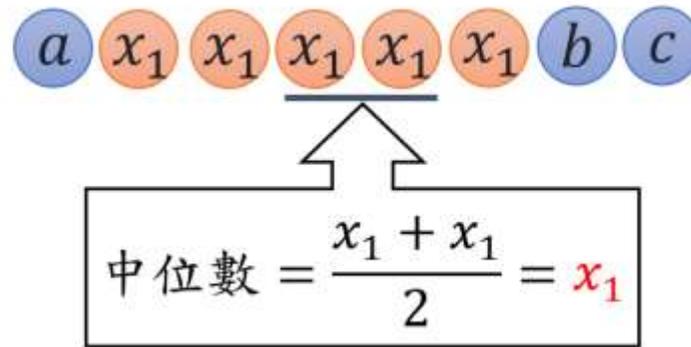
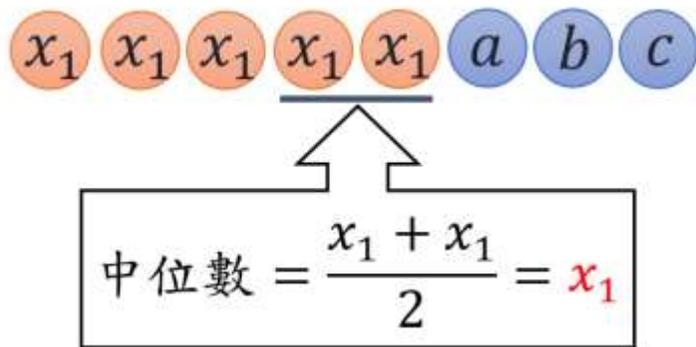
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
4	2.3333	2	1.6667	1.3333	1	0.6667	0.3333	0	-0.333	-0.667	-1	-1.333	-1.667	-2	-2.333	
5	2.3333	2	1.6667	1.3333	1	0.6667	0.3333	0	-0.333	-0.667	-1	-1.333	-1.667	-2	-2.333	
6	2.3333	2	1.6667	1.3333	1	0.6667	0.3333	0	-0.333	-0.667	-1	-1.333	-1.667	-2	-2.333	
10	2.8333	2	1.6667	1.3333	1	0.1667	-0.667	-1.5	-2.333	-3.167	-4	-4.833	-5.667	-6.5	-7.333	
11	2.8333	2	1.6667	1.3333	1	0.1667	-0.667	-1.5	-2.333	-3.167	-4	-4.833	-5.667	-6.5	-7.333	
12	2.8333	2	1.6667	1.3333	1	0.1667	-0.667	-1.5	-2.333	-3.167	-4	-4.833	-5.667	-6.5	-7.333	
19	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-2.458	-5.333	-5	-4.667	-4.333	-4	-5.667	-7.333	-9	-10.67	
20	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-2.458	-5.333	-5	-4.667	-4.333	-4	-5.667	-7.333	-9	-10.67	
21	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-2.458	-5.333	-5	-4.667	-4.333	-4	-5.667	-7.333	-9	-10.67	
37	4.2708	2	1.6667	1.3333	1	-7.729	-3.833	-6.625	-5.333	-14.42	-4	-15.75	-21	-14.88	-14.75	
38	4.2708	2	1.6667	1.3333	1	-7.729	-3.833	-6.625	-5.333	-14.42	-4	-15.75	-21	-14.88	-14.75	
39	4.2708	2	1.6667	1.3333	1	-7.729	-3.833	-6.625	-5.333	-14.42	-4	-15.75	-21	-14.88	-14.75	
61	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-3.771	-12.31	-20	-5.333	-16	-4	-11	-14.92	-21.44	-15.25	
62	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-3.771	-12.31	-20	-5.333	-16	-4	-11	-14.92	-21.44	-15.25	
63	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-3.771	-12.31	-20	-5.333	-16	-4	-11	-14.92	-21.44	-15.25	
109	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-8.911	-6.323	-15.69	-5.333	-14.7	-4	-24.38	-17.17	-25	-15.25	
110	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-8.911	-6.323	-15.69	-5.333	-14.7	-4	-24.38	-17.17	-25	-15.25	
111	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-8.911	-6.323	-15.69	-5.333	-14.7	-4	-24.38	-17.17	-25	-15.25	
229	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-4.396	-6.667	-14.7	-5.333	-14.42	-4	-16	-17.17	-21.44	-15.25	
230	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-4.396	-6.667	-14.7	-5.333	-14.42	-4	-16	-17.17	-21.44	-15.25	
231	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-4.396	-6.667	-14.7	-5.333	-14.42	-4	-16	-17.17	-21.44	-15.25	

Step1三數
⋮
Step3三數
⋮
Step6三數
⋮
Step12三數
⋮
Step20三數
⋮
Step36三數
⋮
Step76三數

研究歷程

五、一次加入**5個**相同數字

透過數列的排列情形，得知中位數確實存在於數列中。



原數列(a, b, c)第一次加入5個相同數的中位數

研究歷程

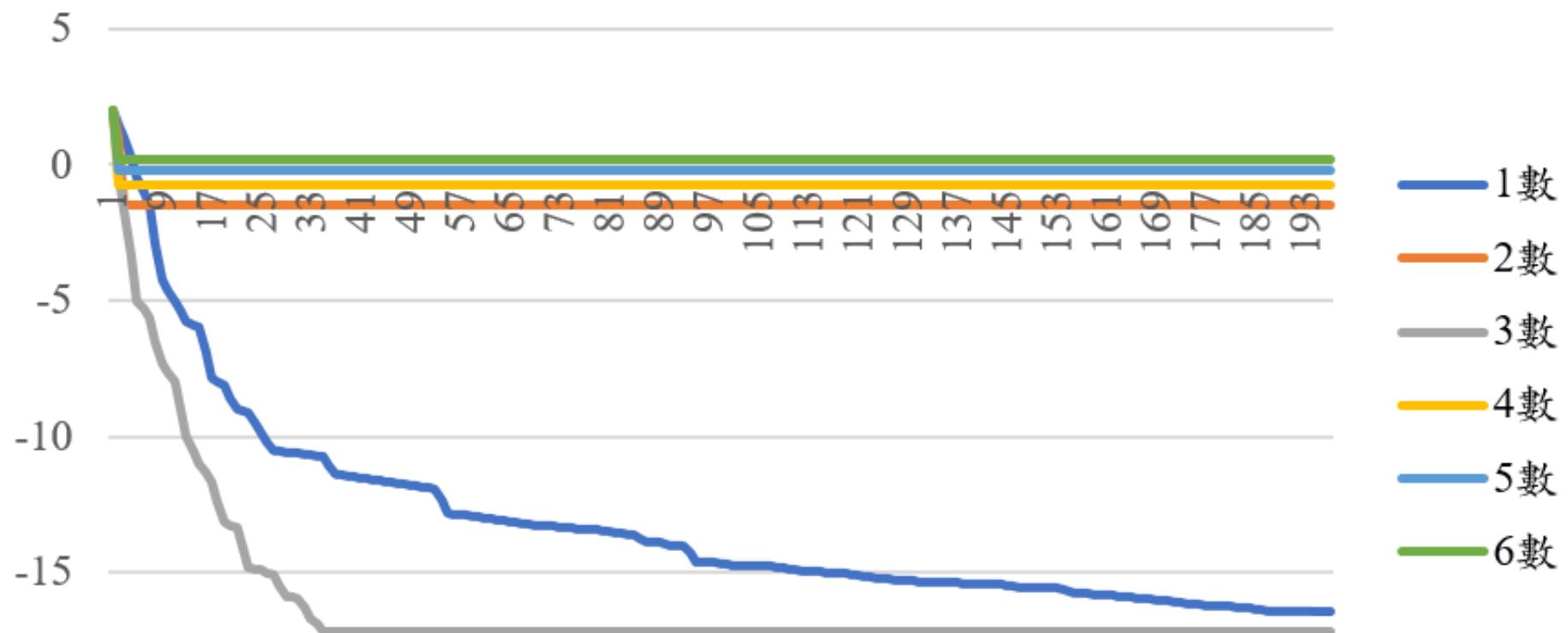
◆ 一次加入5個相同數字之數列穩定狀態

原數列的三個數			穩定次數	穩定值	
$1. a < b = c$			三次	$\frac{-a + 6b}{5}$	
$2. a < b < c$	(1) $b - a = c - b$		一次	b	
	(2) $b - a < c - b$	【情況一】 $a < x_1 < b$	$c - b < 6(b - a)$	三次	$\frac{7b - a - c}{5}$
		【情況二】 $x_1 = a$	$c - b = 6(b - a)$		a
		【情況三】 $x_1 < a$	$c - b > 6(b - a)$		$\frac{7b - a - c}{5}$

研究發現

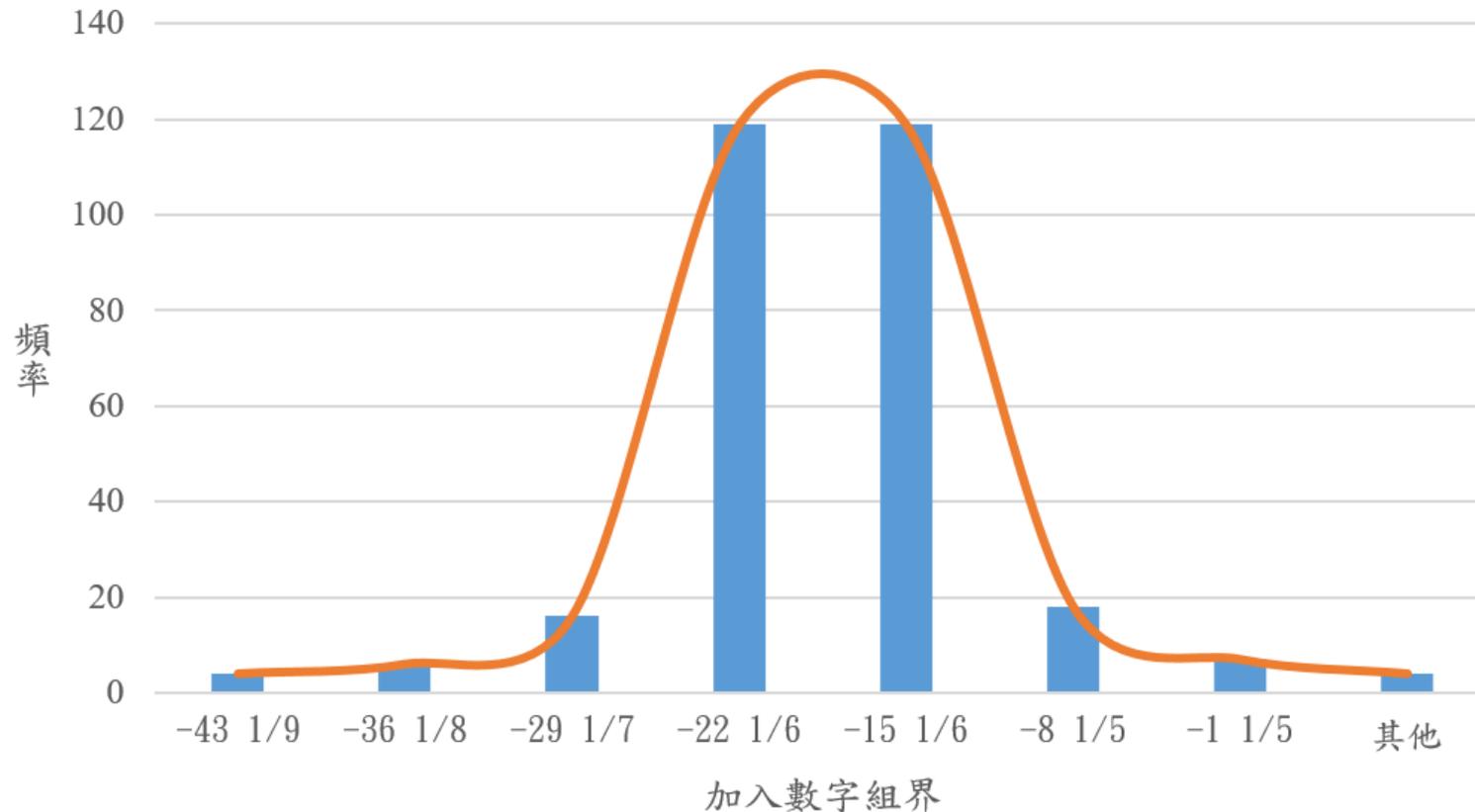
◆ 以原數列(1,2,24)的中位數變化情形為例

中位數



研究發現

◆ 以原數列(1,2,15)一次加入1數的資料長條與曲線圖



研究結果

一、一次加入2個相同數的穩定狀態

原數列的三個數		穩定次數	穩定值	
原數列存在兩數相同($a < b = c$)		二次	b	
原數列成等差($b - a = c - b$)		一次	b	
原數列間差距不相等 $b - a < c - b$	【情況一】 $a < x_1 < b$	$c - b < 3(b - a)$	$\frac{4b - a - c}{2}$	
	【情況二】 $x_1 = a$	$c - b = 3(b - a)$	a	
	【情況三】 $x_1 < a$	$3(b - a) < c - b \leq 8(b - a)$	四次	$\frac{7a - 5b}{2}$
		$c - b > 8(b - a)$		$\frac{4b - a - c}{2}$

研究結果

二、一次加入 n 個相同數($n \geq 4$)的穩定狀態

原數列的三個數		穩定次數	穩定值
原數列存在兩數相同($a < b = c$)		三次	$\frac{(n+1)b - a}{n}$
原數列成等差($b - a = c - b$)		一次	b
原數列間差距不相等 ($b - a < c - b$)	【情況一】 $a < x_1 < b$	三次	$\frac{(n+2)b - a - c}{n}$
	【情況二】 $x_1 = a$		a
	【情況三】 $x_1 < a$		$\frac{(n+2)b - a - c}{n}$

研究心得與未來展望

- ◆ 影響穩定狀態的重要關鍵為中位數的取值方式。
- ◆ 將原數列推廣至四個數以上，為數列的穩定狀態建立更完整的規則與數學一般式。



感謝聆聽與指導