
圓圈遊戲

— 探討圓圈切割塗色攻略 —

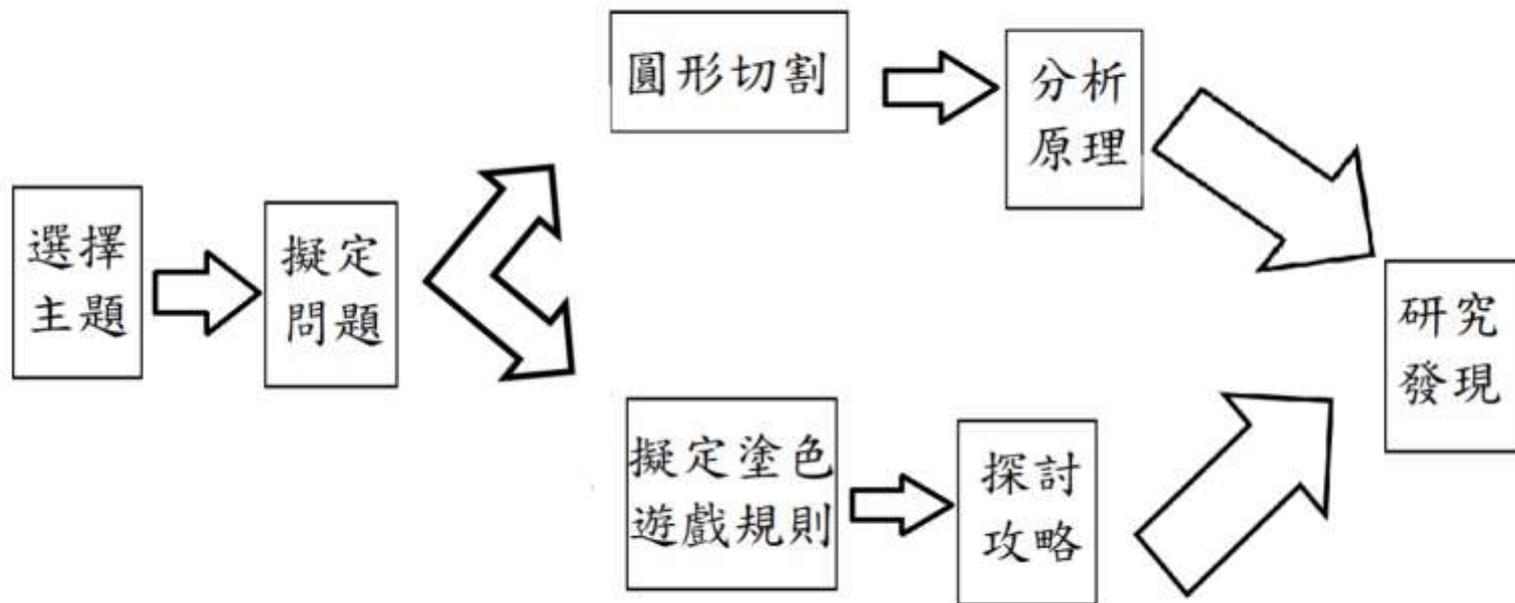
一、研究動機

1. 原因：參加自然科學班
2. 原理：把一個圓用直線分成很多塊，然後塗上顏色，邊緣有碰到的區塊就不能塗上同一個顏色。

二、研究問題

1. 探討圓形切成2~8塊任意塗色的方法
2. 分析塗色原理
3. 訂定圓圈塗色的遊戲規則
4. 探討2~4線圓圈切割塗色的攻略

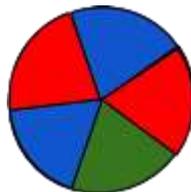
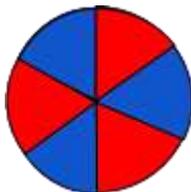
三、研究計畫



四、資料分析

(一)圓形切割塗色

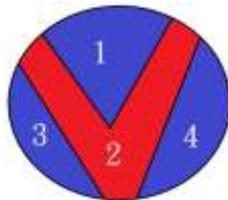
1. 等分切割塗色：偶數塊只需使用2種顏色，奇數塊需使用3種顏色。



2. 不等分切割塗色：

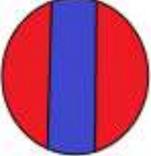
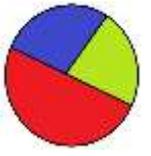
(1)發現：最多只需要四種顏色。

(2)因為不等分切割是我們隨意畫線切割，一開始不知道如何分類，所以決定分析每一個區塊碰到的其他區塊，以比的方式來呈現。例如：



1	2	3	4
1:1	1:3	1:1	1:1

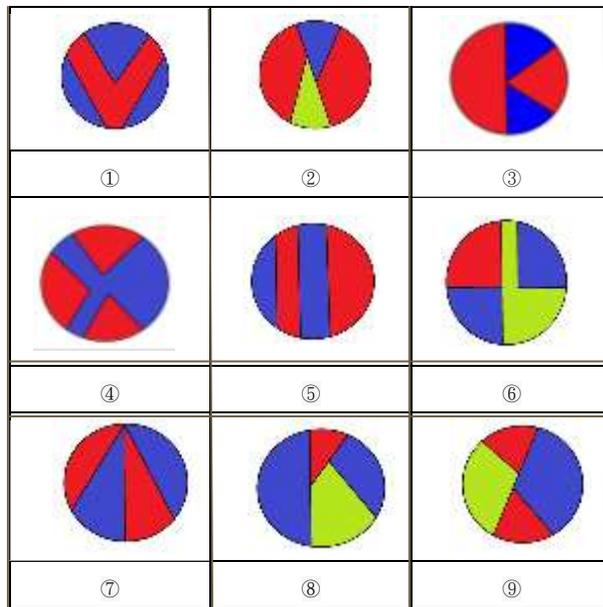
(3) 3塊

		
①	②	③
原理	圓形編號	顏色種類
1個1:2, 2個1:1	①②	2種
全部1:2	③	3種

切割的發現：同樣的圓圈切割成三塊，依據比例分類，可以分成2類。

塗色的發現：依據塗色原理，我發現最少只需要2種顏色，最多則需要3種顏色。

● (3)4塊



原理	圖形編號	顏色種類
2 個 1 : 2 , 2 個 1 : 1	⑤⑦	2 種
1 個 1 : 3 , 3 個 1 : 1	①④	2 種
全部 1 : 2	③	2 種
2 個 1 : 3 , 2 個 1 : 2	②⑥⑧⑨	3 種

觀察與發現：依據塗色原理，我發現最少只需要2種顏色，最多則需要3種顏色。

(二)擬定塗色遊戲規則

1. 動機：

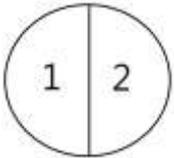
我們覺得只有討論圓圈塗色好像太無聊了，所以就想到我們是兩人一組，可以把它變成一個遊戲。

2. 遊戲規則：

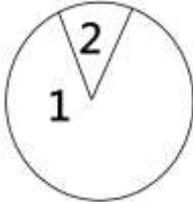
- (1)兩人猜拳，贏家任意喊1個1~4的數字(代表幾條線)。
- (2)兩人輪流畫直線，且後手必須將為連接到圓周的直線連接到圓周上。
- (3)兩人輪流挑選任意區塊塗色，贏家先塗。
- (4)當其中一人有任意兩塊相鄰的區塊圖同一個顏色，他就輸了。

3. 遊戲攻略

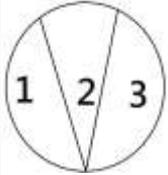
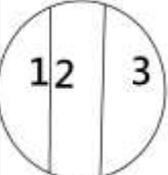
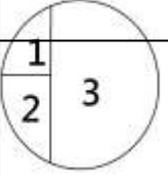
(1) 1線(2塊)：平手

區塊	圖形	塗色順序	結果	分析
2塊		① 1→2， 2→1。 (2種)	1. 平手	因為是兩塊， 所以一定會 平手。

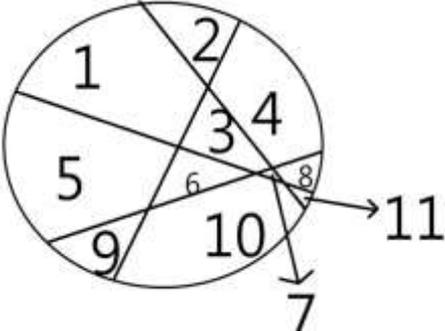
(2)2線(2塊)

區塊	圖形	塗色順序	結果	分析
2塊		①1→2，2→1。 (2種)	1. 平手	因為是兩塊，所以一定會平手。

(3)2線(3塊)

區塊	圖形	塗色順序	結果	分析
3塊		① $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 。 (2種) ② $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$ $2 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3$ (1+2+1=4種)	1. 平手 2. 先手輸	平手是先手塗兩側，且後手塗在先手的隔壁。 先手塗兩側，且後手塗空一格，或是先手塗中間，則先手輸。
		① $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 。 (2種) ② $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$ $2 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3$ (1+2+1=4種)	1. 平手 2. 先手輸	平手是先手塗兩側，且後手塗在先手的隔壁。 先手輸有兩種情況，一是先手塗兩側，且後手塗空一格，二是先手塗中間。
		① $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$ $2 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3$ $3 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 2$ (2*3=6種)	先手必輸	先手必輸

(5)4線(11塊)

區塊	圖形	塗色順序	結果	分析
11塊		① 8→3→2→5→10→11 ② 2→5→11→8→3→10→9 ③ 3→1→2→4→5→9→10 →6→8→7	1. 先手輸 2. 先手贏 3. 先手輸	塗10和3輸的 機率較高

五、研究發現

(一) 塗色的發現

1. 等分切割的發現：偶數塊只需使用2種顏色，奇數塊需使用3種顏色。



2. 不等分切割的發現：

(1) 最多只需4種顏色。

(2) 結構相同(分析每個區塊對應幾塊)，需要塗的顏色種類就會相同。

五、研究發現

(二)切割的發現

我們在做攻略整理時，一直在思考每多1條線，它可區分的最多區塊到底有幾塊，整理後發現：

(1)1線最多會有2塊， $a(1)=2$

(2)2線最多會有4塊， $a(2)=a(1)+2=4$

(3)3線最多會有7塊， $a(3)=a(2)+3=7$

(4)4線最多會有11塊， $a(4)=a(3)+4=11$

(5)5線最多會有16塊， $a(5)=a(4)+5=16$

(6)6線最多會有22塊， $a(6)=a(5)+6=22$

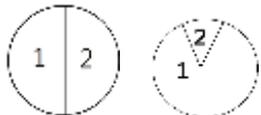
因此，我推論出他們的公式應該是： $a(n)=a(n-1)+n$ 。

五、研究發現

(三) 攻略的發現

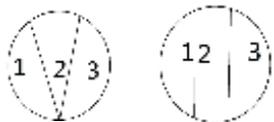
1. 圓圈結構相同，遊戲的攻略相同。

(1) 2塊1:1，平手。例：010201、020201。



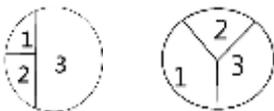
(2) 2塊1:1，1塊1:2，先手輸或平手。

例：020301、020302。



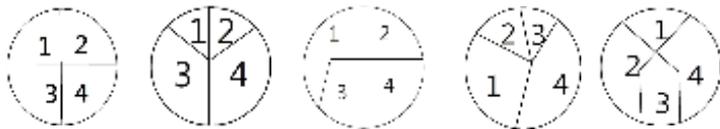
(3) 切蛋糕成3塊，每塊都是1:2，先手輸。

例：020303、030301。



(4) 切蛋糕成4塊，每塊都是1:2，先手輸或平手。

例：020401、030403、030406、040401、040403。



(5) 2塊1:2，2塊1:3，先手贏或先手輸。

例：030402、030404、040402。



(6) 3塊1:2，2塊1:3，先手贏或先手輸。

例：030501、030504、030505。

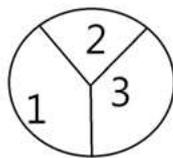


五、研究發現

2. 切蛋糕的結構，可分為偶數塊和奇數塊來推論：

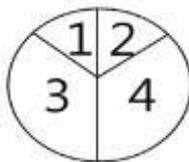
(1) 奇數(由圓心向圓周切成3、5、7...塊)區塊：

先手必輸。



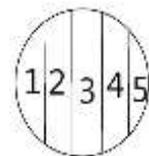
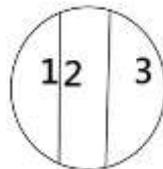
(2) 偶數(一個圓由圓心向圓周切成2、4、6...塊)區塊：

先手輸或平手。

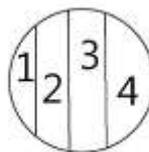


3. 夾心餅乾(一定有2個1:1)的結構，我們觀察：

(1) 3塊：平手或先手輸，5塊先手輸機率高。



(2) 4塊：平手機率高。



因此，夾心餅乾類型我們推論：

偶數塊平手機率高，奇數塊先手輸機率高。

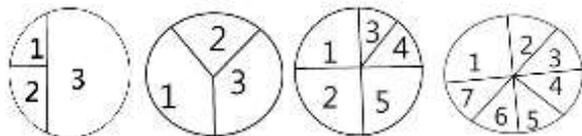
五、研究發現

4. 先手攻略：

(1) 先手要避免畫成這些圖形：(先手必輸)

① 奇數塊切蛋糕圖形：

020303、030301、030506、040703。

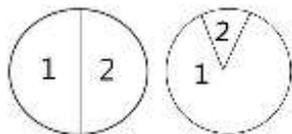


② 對稱圖形：040601。



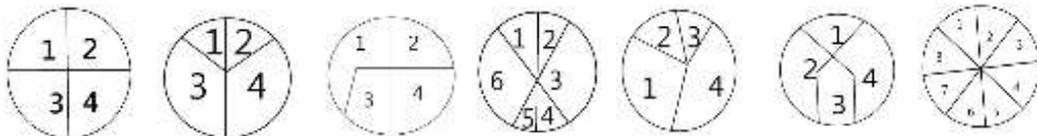
(2) 若無法避免畫成以上的圖形，則盡量畫成以下這些圖形(至少有平手的機會)：

① 010201、020201(畫成2塊，一定平手。)

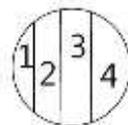


② 偶數塊切蛋糕圖形：

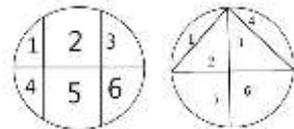
020401、030403、030406、030602、040401、040403、040801。



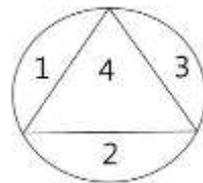
③ 偶數塊夾心餅乾：030401。



④ 對稱圖形：030601、040602。



(3) 這是一個先手輸機率較高的遊戲，所以先手要盡量畫成以下這個圖形(030405)，因為這是唯一一個先手贏的機率高達80%的圖形。



六、困難與解決

(一) 計算攻略的過程種類太多

解決：運用樹狀圖幫助計算

(二) 切割的公式很複雜

解決：一起討論公式

(三)繪製等分切割的圓時，遇到困難

解決:上網查詢資料，學習使用Photo Cap軟體繪製

(四)報告內容太繁雜

解決:努力加毅力，我們終於完成報告了!

謝謝聆聽

謝謝聆聽